Economía y Finanzas Matemáticas

Modelos Binomiales

Rafael Orive Illera
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid
rafael.orive@uam.es

Abril 2018

Modelos Binomiales

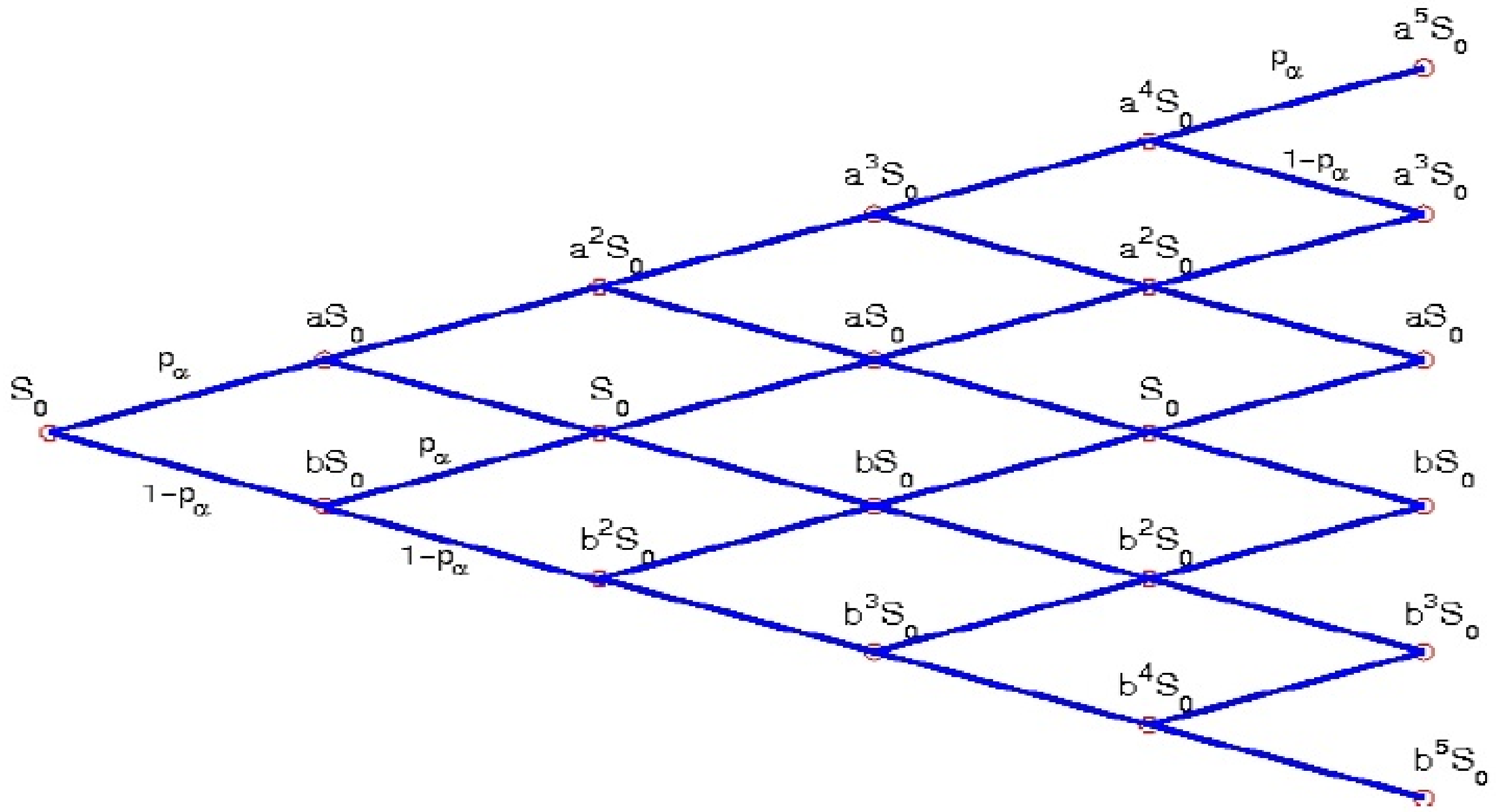
Extendemos la dinámica de un activo con riesgo S en un modelo con N-periodos.

- Los inversores coinciden en N-periodos y fechas de trasacción
- Movimiento de S^1: alza a, baja b.

$$S_{n+1}^1 = \begin{cases} aS_n^1 & \text{alza} \\ bS_n^1 & \text{baja} \end{cases}$$

- Recombinación: $a \times b = 1$
- Hipótesis simplificadoras: No se pagan dividendos; No hay costes de transacción, ni impuestos; Se pueden fraccionar los activos; Se permiten descubiertos ilimitados en t

Para cinco periodos esta es la apariencia de un árbol binomial.



- ω es uno de los posibles caminos aleatorios
- $S_n(\omega)$ $n = 0, \ldots, N$ la trayectoria del subyacente
- Cada S_n $n = 1, \ldots, N$ es una variable aleatoria
- La sucesión $\{S_n\}_{n=0}^{N}$ es un proceso estocástico discreto
- $Z_n(\omega)$ $n = 0, \ldots, N$ el número de subidas hasta n

$$S_n(\omega) = S_0 a^{Z_n(\omega)} b^{n - Z_n(\omega)}$$

- La variable aleatoria Z_n es una binomial $B(n, p_\alpha)$.
- Hay 2^N trayectorias posibles $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_{2^N}\}$.

$$P_\alpha(\omega) = p_\alpha^{Z_N(\omega)} (1 - p_\alpha)^{N - Z_N(\omega)} \qquad \forall \omega \in \Omega$$

- Hay $N + 1$ valores posibles para S_N
- La filtración $\{\mathcal{F}_n\}_{0 \leq n \leq N}$ donde

$$\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, S_2, \ldots, S_n)$$

- Un activo contingente es una variable aleatoria $\mathcal{F}_n$-medible
- La dinámica del activo sin riesgo esta caracterizada por su rendimiento

$$S_n^0 = (1+r)S_{n-1}^0 \quad \forall n = 1, \ldots, N, \quad S_0^0 = 1$$

- La economía es viable si $b < 1 + r < a$
- La probabilidad de riesgo neutro en un periodo

$$q = \frac{1+r-b}{a-b}, \qquad 1 - q = \frac{a-1-r}{a-b}$$

- La probabilidad de riesgo neutro del modelo binomial

$$Q(\omega) = q^{Z_N(\omega)}(1-q)^{N-Z_N(\omega)} \qquad \forall \omega \in \Omega$$

- Los precios descontados son una martingala

$$\frac{S_m}{(1+r)^m} = E_Q\left[\frac{S_n}{(1+r)^n}|\mathcal{F}_m\right] \qquad \forall 0 \le m < n \le N$$

y, en particular, el precio de un activo

$$S_0 = E_Q\left[\frac{S_N}{(1+r)^N}\right]$$

Martingala

- Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad finito
- $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_N$ algebras de subconjuntos de $\mathcal{F}$ tal

$$\mathcal{F}_0 \preceq \mathcal{F}_1 \preceq \cdots \preceq \mathcal{F}_N = \mathcal{F}$$

$\{\mathcal{F}_n\}$ es una filtración.

- Una sucesión de variables aleatorias $S_1, \ldots, S_n$ sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se llama martingala respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_n\}$ si:

(i) S_n es $\mathcal{F}_n$ medible
(ii) $E[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] = S_n$

Carteras autofinanciadas

El inversor va a rebalancear su cartera en función del estado de la economía en ese momento. Cada estrategia va a ser un proceso estocástico

$$\varphi_n(\omega) = \left(\varphi_n^0(\omega), \varphi_n^1(\omega)\right)$$

$\varphi_n^i(\omega)$ es el número de unidades del activo i durante $(n, n+1]$. La redistribución viene dada

$$\varphi_{n+1} \cdot S_{n+1} = \varphi_n \cdot S_{n+1}$$

Dada una estrategia φ, $V_n(\varphi)$ es el valor de la cartera en n, $n \leq N$ y verifica

$$V_{n+1}(\varphi) - V_n(\varphi) = \varphi_n \cdot (S_{n+1} - S_n)$$
$$V_{n+1}(\varphi) = V_0(\varphi) + \sum_{j=0}^{n} \varphi_j \cdot (S_{j+1} - S_j)$$

Teorema. La economía descrita por el modelo binomial es completa

Al tratarse de una economía viable, el valor de una cartera cuyo flujo en N es $\varphi(S_N)$ viene dado por

$$V_0 = \frac{1}{(1+r)^N} E_Q[\varphi(S_N)]$$

Valor de una opción de compra europea, call

Un call viene representado por el flujo final $X = (S_N - K)^+$, i.e.,

$$X(\omega) = \max(S_N(\omega) - K, 0)$$

El valor es entonces:

$$\begin{aligned} c_0 = V_0 &= \frac{1}{(1+r)^N} E_Q\left[(S_N - K)^+\right] \\ &= \frac{1}{(1+r)^N} \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} q^n (1-q)^{N-n} (S_0 a^n b^{N-n} - K)^+ \end{aligned}$$

y podemos ver el call como un proceso estocástico

$$c_n = \frac{1}{(1+r)^{N-n}} E_Q\left[(S_N - K)^+ \middle| \mathcal{F}_n\right]$$

La ausencia de oportunidades de arbitraje implica la paridad call-put

$$c_n - p_n = S_n - K(1+r)^{n-N}$$

y podemos ver la put como un proceso estocástico.

Consecuencia: obtenemos el valor de una put

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{(1+r)^N} \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} q^n (1-q)^{N-n} (S_0 a^n b^{N-n} - K)^+ \\ &\quad + K(1+r)^{-N} - S_0 \end{aligned}$$

Ajustes del árbol a datos del mercado

- T, tiempo hasta vencimiento. Δt, tiempo entre dos nodos
- r_c es el tipo libre de riesgo anual (composición continua)

$$e^{r_c \Delta t} = 1 + r \Rightarrow r \approx r_c \Delta t$$

- La probabilidad de riego neutro verifica

$$q = \frac{e^{r_c \Delta t} - b}{a - b}$$

- La volatilidad σ de un activo verifica que para un pequeño Δt la desviación típica de sus rendimientos es $\sigma\sqrt{\Delta t}$

Marco natural para el rendimiento relativo $\widehat{R} = S_{n+1}/S_n$. Se verfica:

$$\begin{aligned} e^{r_c \Delta t} &= E_Q[\widehat{R}] = aq + b(1-q) \\ \sigma^2 \Delta t &= V_Q[\widehat{R}] = a^2 q + b^2(1-q) - e^{2 r_c \Delta t} \end{aligned}$$

En general: dos ecuaciones; tres incógnitas a, b, q. Distintas aproximaciones

- Aproximación Cox-Ross-Rubinstein, $a \cdot b = 1$:

$$a = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \qquad b = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

- Aproximación Jarrod-Rudd, $q = 0.5$:

$$a = \frac{e^{r_c \Delta t} e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}}{\cosh(\sigma\sqrt{\Delta t})}, \qquad b = \frac{e^{r_c \Delta t} e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{\cosh(\sigma\sqrt{\Delta t})}$$

- Aproximación Tian. Añadimos la ecuación de los momentos de orden 3 que hace coincidir el modelo binomial con el modelo continuo:

$$a^3 q + b^3(1-q) = e^{3r_c\Delta t} e^{3\sigma^2\Delta t}$$

Entonces, $q = (e^{r_c\Delta t} - b)/(a-b)$ y

$$\begin{aligned} a &= \frac{e^{(r_c+\sigma^2)\Delta t}}{2}\left[e^{\sigma^2\Delta t} + 1 + \sqrt{e^{2\sigma^2\Delta t} + 2e^{\sigma^2\Delta t} - 3}\right] \\ b &= \frac{e^{(r_c+\sigma^2)\Delta t}}{2}\left[e^{\sigma^2\Delta t} + 1 - \sqrt{e^{2\sigma^2\Delta t} + 2e^{\sigma^2\Delta t} - 3}\right] \end{aligned}$$

Fórmula de Cox-Rubinstein

El valor de una call europea calculado en el árbol binomial es:

$$\boxed{c_0 = S_0 \phi(n_0, N, q') - \frac{K}{(1+r)^N} \phi(n_0, N, q)}$$

donde

$$\phi(n_0, N, q) = P(X \geq n_0) \quad \text{donde} \quad X \sim B(N, q)$$

y

$$n_0 = \left[\frac{\ln(K/(S_0 b^N))}{\ln(a/b)} \right] + 1 \quad \text{y} \quad q' = \frac{aq}{1+r}$$